Решение тригонометрических уравнений и их систем

Мисирова Мадина Эльвировна
учитель математики
ОСШ №8 имени Н. Торекулова

В курсе алгебры и начал анализа рассматриваются некоторые основные методы решения тригонометрических уравнений, которых может быть недостаточно для подготовки и успешной сдаче ЕНТ по математике. Программа элективного курса «Методы решения тригонометрических уравнений и их систем» предлагает углубленное изучение методов школьного курса, расширение списка методов за счет освоения новых и изучение некоторых методов решения уравнений с обратными тригонометрическими функциями.

Целью элективного курса является коррекция базовых математических знаний, систематизация, расширение и углубление знаний в решения тригонометрических уравнений и систем;

развитие познавательных интересов и творческих способностей учащихся, психических способностей ребенка, обеспечивающих его адаптацию в дальнейшей жизни, научить школьников учиться посредствам личностно – ориентированного подхода;

воспитание творческой личности, умеющей самореализовываться и интегрироваться в системе мировой математической культуры.

Задачи:

1. Сформировать представление о новых методах решения тригонометрических уравнений и их систем.
2. Дать представление об уравнениях с обратными тригонометрическими функциями и некоторых методах их решения.
3. Подготовить учащихся к ЕНТ по математике.
4. Формировать коммуникативную компетентность учащихся.

Курс ориентирован на расширение базового уровня знаний учащихся по математике, является предметно-ориентированным и дает учащимся возможность познакомиться с интересными, нестандартными вопросами тригонометрии, с весьма распространенными методами решения тригонометрических задач, проверить свои способности к математике. Вопросы, рассматриваемые в курсе, выходят за рамки обязательного содержания. Вместе с тем, они тесно примыкают к основному курсу. Поэтому данный элективный курс будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических знаний и умений, предусмотренных школьной программой, поможет оценить свои возможности по математике.

Требования к математической подготовке учащихся:

1. Знать тригонометрические формулы и уметь применять их при преобразовании тригонометрических выражений;
2. решать тригонометрические уравнения с использованием различных методов по заданному алгоритму и в нестандартной ситуации;
3. логично и полно излагать решение.

Программа элективного курса «Методы решения тригонометрических уравнений и их систем» рассчитана на 17 часов. Курс может быть рассмотрен в 10 классе после изучения соответствующих тем учебника и в 11 классе при подготовке к экзамену по математике.

Для реализации данного курса используются различные формы организации занятий, такие как лекция и семинар, групповая, индивидуальная, работа в парах, исследовательская деятельность учащихся, практикумы и консультации.

Результатом предложенного курса должно быть успешное решение заданий ЕНТ по теме «Тригонометрические уравнения и их системы».

Итоги реализации данной программы подводятся в форме практических и самостоятельных работ, тестов.

Тематический план элективного курса
«Методы решения тригонометрических уравнений и их систем» 17 часов.

Название раздела	№	Название темы	Всего часов	Теория	Практика
Методы решения	1	Основные тригонометрические формулы. Тригонометрические уравнения. Общие положения (повторение).	1	0,5	0,5
	2	Решение уравнений разложением на множители.	1	0,5	0,5
	3	Решение уравнений преобразованием суммы	1	0,5	0,5

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания №KZ93VPY00020180 выдано Комитетом информации Министерства информации и общественного развития РК 11.02.2020 г.

тригонометрических уравнений.		тригонометрических функций в произведение и произведения – в сумму.			
	4-5	Однородные уравнения и уравнения, к ним сводящиеся, метод вспомогательного аргумента.	2	1	1
	6	Решение уравнений с использованием ограниченности функций y=sinx и y=cosx.	1	0,5	0,5
	7	Задачи, требующие отбора корней.	1	0,5	0,5
	8	Решение уравнений, содержащих тригонометрические функции под знаком радикала.	1	0,5	0,5
	9	Использование условий равенства тригонометрических функций.	1	0,5	0,5
	10-11	Решение тригонометрических уравнений со сложным аргументом.	2	1	1
	12-13	Методы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.	2	1	1
Системы уравнений, способы решения	14-15	Системы тригонометрических уравнений.	2	0,5	1,5
	16	Зачет.	1		1
	17	Итоговое занятие.	1		1

Содержание занятий

Занятие 1. Основные тригонометрические формулы. Тригонометрические уравнения. Общие положения (повторение) (1ч).

Цель: повторить основные тригонометрические формулы.

Основные тригонометрические тождества. Повторить формулы корней простейших тригонометрических уравнений.

Занятие 2. Решение уравнений разложением на множители (1ч).

Цель: создание условий для формирования умений решать уравнения разложением на множители.

При решении тригонометрических уравнений можно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Это вынесение общего множителя за скобки, группировка, применение формул сокращенного умножения, тригонометрических формул.

Пример 1. $2\sqrt{2}\sin x\cos x-1=\sqrt{2}\sin x-2\cos x$.

Перегруппируем члены уравнения:

$(2\sqrt{2}\sin x\cos x-\sqrt{2}\sin x)+(2\cos x-1)=0$

Выносим общий множитель $\sqrt{2}$ sin x за скобки, получим

$\sqrt{2}$ sin x(2cos x-1) + (2cos x-1)=0 $\Leftrightarrow$ (2cos x-1)($\sqrt{2}$ sin x+1)=0.

Имеем совокупность $\left[\begin{array}{l}2\cos x-1-0,\\ \sqrt{2}\sin x+1=0,\end{array}\right.$ равносильную исходному уравнению.

Итак, X=± $\frac{\pi}{3}+2\pi n; x=(-1)^m(-\frac{\pi}{4})+\pi m=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{4}+\pi m, n, m\in Z$

Занятие 3. Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение и произведения – в сумму (1ч).

Цель: создание условий для формирования умений решать уравнения преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение и произведения – в сумму.

Формулы преобразования суммы или разности тригонометрических функций в произведение. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Задания для самостоятельной работы:

Решить уравнения:

1.cos9x-cos7x+cos3x-cos x=0,

2. sin5xcos3x=sin6xcos2x,

3. cosx+cos2x+cos3x+cos4x=0.

Занятие 4-5. Однородные уравнения и уравнения, к ним сводящиеся, метод вспомогательного аргумента (2ч).

Цель: создание условий для формирования умений решать уравнения вида asinx +bcos x=0, a*sin^{2}x+bsin x*cos x+c*cos^{2}x=0, asin^{2}x+bsin xcos x+c cos^{2}x=d,d≠0, a sin x +b cos x=c,(ab≠0).

К однородным уравнениям относятся стандартные однородные уравнения относительно sin x и cos x: asinx +bcos x=0 - однородное уравнение первой степени относительно sin x и cos x, a*sin^{2}x+bsin x*cos x+c*cos^{2}x=0 - однородное уравнение второй степени относительно sin x и cos x и тригонометрические уравнения, однородные относительно других тригонометрических функций.

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания №KZ93VPY00020180 выдано Комитетом информации Министерства информации и общественного развития РК 11.02.2020 г.

Уравнения, сводящиеся к однородным.

I.Рассмотрим уравнение $a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x=d, d\neq0$.

Уравнение не является однородным, однако, применяя основное тригонометрическое тождество $\sin^2x+\cos^2x=1$, то есть полагая $d=d*(\sin^2x+\cos^2x)$, мы приведем его к однородному уравнению.

II. Уравнение вида $a \sin x +b \cos x=c, (ab\neq0)$.

1 способ.

Уравнение приводится к однородному, если применить формулы двойного угла для sin x и cos x.

Уравнение примет вид :

$A\sin x+b\cos x=c \Leftrightarrow 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=c(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})$.

Приводя подобные члены, получим однородное уравнение второй степени относительно $\sin^2\frac{x}{2}$ и $\cos^2\frac{x}{2}$:

$(c+b)\sin^2\frac{x}{2}-2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+(c-b)\cos^2\frac{x}{2}=0$.

2 способ.

Использование формулы дополнительного угла:

$a \sin x +b \cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, где $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Занятие 6. Решение уравнений с использованием ограниченности функций y=sinx и y=cosx (1ч).

Цель: создание условий для формирования умений решать уравнения с использованием ограниченности тригонометрических функций.

Решение уравнений с использованием ограниченности функций y=sinx и y=cosx следует из свойств, что $|\sin t|\leq1$ и $|\cos t|\leq1$.

Рассмотрим пример, решите уравнение: $\sin3x\cos4x=1$.

Из свойств функций sin t и cos t следует, что $|\sin t|\leq1$ и $|\cos t|\leq1$. Следовательно, произведение $\sin3x\cos4x$ может быть равно единице тогда только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 3x=1\\ \cos 4x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 3x=-1\\ \cos 4x=-1\end{cases}\end{array}\right.,$$

Решение каждой из систем приводит к уравнениям в целых числах.

Имеем в итоге $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$.

Занятие 7. Задачи, требующие отбора корней (1ч).

Цель: создание условий для формирования умений выбирать из полученной серии решений, лишь часть, удовлетворяющую некоторому дополнительному условию.

Занятие 8. Решение уравнений, содержащих тригонометрические функции под знаком радикала (1ч).

Цель: создание условий для формирования умений решать различные виды уравнений, содержащих тригонометрические функции под знаком радикала.

В соответствии с общим правилом решения иррациональных уравнений вида: $\sqrt{A(x)}=B(x)$ и $\sqrt{A(x)}=\sqrt{B(x)}$, выполняем преобразования.

Занятие 9. Использование условий равенства тригонометрических функций (1ч).

Цель: сформировать умение использовать условие равенства тригонометрических функций для решения уравнений.

Метод основан на следующих утверждениях:

1.$\cos x=\cos y \Leftrightarrow x=\pm y+2\pi n$;

2.$\sin x=\sin y \Leftrightarrow x=(-1)^m y+\pi m$;

3. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+\pi m,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi m;\end{cases}$ 4.$\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+\pi m,\\ x\neq\pi k,\\ y\neq\pi m,\end{cases}$

которые следуют из определения тригонометрических функций и способов решения простейших тригонометрических уравнений. Рассмотрим пример.

Решите уравнение sin10x=sin5.

$10x=(-1)^n5+\pi m$, $x=(-1)^n0,5+\frac{\pi}{10}m, m\in Z$.

Занятие 10-11. Решение тригонометрических уравнений со сложным аргументом (2ч)

Цель: Сформировать представление о способах решения тригонометрических уравнений, в которых сложный аргумент – сложная функция от x.

Рассмотрим пример, решите уравнение: $\sin(\sin(\cos x – \sin x))=0$.

Решение: Имеем, что $\sin(\cos x – \sin x)=\pi n$, nЄZ, но

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания №KZ93VPY00020180 выдано Комитетом информации Министерства информации и общественного развития РК 11.02.2020 г.

т.к. $-1 \le \sin t \le 1$, òî $-1 \le \pi n \le 1$, откуда n=0. Далее решаем уравнение sin(cosx – sinx)=0. Оно равносильно уравнению cosx – sinx=πк, к ЄZ, или уравнению $\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\pi k}{2}$. Замечаем, что значения к должны удовлетворять двойному неравенству $-1 \le \frac{\pi k}{\sqrt{2}} \le 1$, откуда к=0. Итак, остается решить уравнение $\sin(x-\frac{\pi}{4}) = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$

Занятие 12-13. Методы решения уравнений, содержащих
обратные тригонометрические функции (2ч).

Цель: Сформировать представление о способах решения тригонометрических уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

При решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, необходимо знать определения и свойства этих функций.

Решение уравнений, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов, основано на свойстве монотонности. Справедливы следующие равносильные переходы:

1) arcsin f(x) =arcsin g(x) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ |g(x)| \le 1 \end{cases}$

2) arccos f(x)=arccos g(x) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ |g(x)| \le 1 \end{cases}$

3) arctg f(x)=arctg g(x) $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

4) arcctg f(x)=arcctg g(x) $\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Занятие 14-15. Системы тригонометрических уравнений (2ч).

Цель: Сформировать представление о способах решения систем тригонометрических уравнений.

Занятие 16. Зачет.

Решение уравнений и неравенств с использованием всех изученных методов.

Примерные задания к зачету.

1.Найти корень, принадлежащий отрезку $\left[\frac{1}{4};4\right]$ (или произведение таких корней, если их несколько) уравнения $\sin(2\pi x)\ \mathrm{ctg}\frac{\pi}{x}=0$.

2.Найти число положительных корней уравнения $(\mathrm{ctg}2\frac{\pi}{x})\sqrt{13x^2-2x}=0$,

Занятие 17. Итоговое занятие (1ч)

Семинар «Нестандартные тригонометрические уравнения и их системы, способы решения».

Литература

1. Авдонин Н.И. 30 уроков репетитора по математике (по материалам вступительных экзаменов в ВУЗы). Учебное пособие. – Н. Новгород; издательство «Век», 1997.
2. Авдонин Н.И. Математика 2000: Предварительное тестирование (по материалам предварительного тестирования перед вступительными испытаниями 2000г. в ННГУ). – Н. Новгород, 2000.
3. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. - М.: Наука, 1976.
4. Бородуля И.Т. Тригонометрические уравнения и неравнства. Москва, «Просвещение»,1989.
5. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: Методические рекомендации и дидактические материалы: пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1990.
6. Зильберберг Н.И. Алгебра –9. Для углубленного изучения математики. Учебное пособие. – Псков: Издательство псковского областного института усовершенствования учителей, 1993.
7. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. – М.: Просвещение, 1995.
8. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия – М.: Просвещение, 1991.
9. Никольская И.Л. Факультативный курс по математике. – М.: Просвещение, 1991.
10.Олежник С.Н. и др. Уравнения и неравенства: Нестандартные методы решений. Учебно-методологическое пособие 10-11 кл. – М.: Дрофа, 2001.
11.Севрюков П.Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие – М.:Илекса, 2008
12.Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. – М.: Просвещение, 1989.
13.Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике. Решение задач. – М.: просвещение, 1991.

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания, информационного агентства и сетевого издания №KZ93VPY00020180 выдано Комитетом информации Министерства информации и общественного развития РК 11.02.2020 г.